7 ЛЕКЦИЯ

Қозғалыс теңдеулерін интегралдау

Теориялық механикада денелердің қозғалысын түсіндірудің мақсаты ретінде дененің координаталары мен жылдамдықтарының уақыт бойынша өзгеруін сипаттайтын қозғалыс теңдеулерін шешу болып табылады. Дегенмен, жалпы жағдайда қозғалыс теңдеулерін шешу күрделі мәселе болып табылады және ол есептің күрделілігіне байланысты сандық әдістерді немесе аналитикалық әдістерді де қолдануды қажет етуі мүмкін.

Қозғалыс теңдеулерін шешудің ең күшті құралдарының бірі - қозғалыс теңдеулерін интегралдау әдісі. Бұл әдіс егер бастапқы шарттар берілген болса, қозғалыс теңдеулерінің аналитикалық шешімін табудан тұрады және кез келген уақытта дененің координаталары мен жылдамдықтарын анықтауға қол жеткізуге болады.

Қозғалыс теңдеулерін интегралдау тәсілі нүктенің қозғалысы немесе жай ғана гармоникалық осциллятор сияқты қарапайым механикалық жүйелерден бастап кванттық механика, салыстырмалылық теориясы т.б. күрделі жүйелерге дейінгі мәселелердің кең ауқымына қолданылуы мүмкін.

Сонымен қатар, осы тарауды оқу нәтижесінде студент қозғалыс теңдеулерін интегралдаудың негізгі әдістері және олардың физиканың әртүрлі салаларында қолданылуы туралы түсінікке ие болуы керек.

Бір өлшемді қозғалыс. Еркіндік дәрежесі бірге тең жүйенің қозғалысын бірөлшемді қозғалыс деп атайды. Осындай жүйенің Лагранж функциясының жалпы түрі:

$$L = \frac{1}{2} a(q) q^2 - U(q) \tag{1}$$

мұндағы $a(q)$- жалпылама координата q функциясы. Мысалы q- декарттық координата болса $q = x$,

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{2}$$

Осы Лагранж функциясына сәйкес қозғалыс теңдеулері жалпы түрде интегралданады. Тіпті бұл жағдайда қозғалыс теңдеулерін жазбай-ақ, энергияның сақталу заңын сипаттайтын теңдеудің бірінші интегралын жазуға болады:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E\,. \tag{3}$$

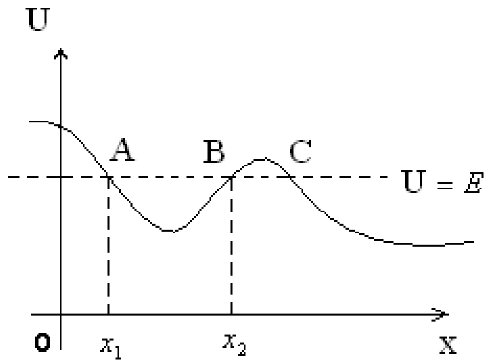
Бұл айнымалыларды айыру тәсілімен интегралданатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}. \tag{4}$$

осыдан

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+const. \tag{5}$$

Осындай қозғалыс теңдеуін шешкенде екі кез келген айнымалының ролін жүйенің толық энергиясы және интеграл тұрақтысы const атқарып тұр. Мұндағы кинетикалық энергия оң шама болғандықтан, қозғалыс кезінде толық энергия барлық уақытта потенциалдық энергиядан артық болады. Қозғалыс кеңістіктің $U(x)<E$ болатын аймағында ғана болады.



Сурет 17.

$U(x)$ тәуелділігі 17 – суретте берілген. Горизонталь түзу сызық толық энергияның мәнін көрсетеді. Мүмкін болатын қозғалыс аймақтарын көрсететін болсақ, ол тек АВ аймағы және С аймағының оң жағы.

$$U(x)=E. \tag{6}$$

Потенциалдық энергиясы толық энергияға тең болатын нүктелер қозғалыс шекарасын көрсетеді. Ол нүктелер *аялдау нүктелері* деп аталады. Себебі бұл нүктелерде қозғалы жылдамдығы нөлге тең болады. Егер қозғалыс аймағы екі нүктемен шектелген болса, онда берілген кеңістіктегі қозғалыс шектелген болады да финитті қозғалыс деп аталады. Егер қозғалыс аймағы шектелмеген немесе бір жағынан ғана шектелген болса, ол инфинитті қозғалыс болады да, бөлшек шексіздікке кетіп қалады.

Бір өлшемді финитті қозғалыс тербелмелі қозғалыс болып табылады. Бөлшек екі жақты шекараның арасында периодты қайталанатын қозғалыста болады, яғни 17-суретті алатын болсақ бөлшек x_1 және x_2 нүктелерінің арасында АВ- потенциалды шұңқырда тербелмелі қозғалыста болады.

Нүктенің x_1 нүктесінен x_2 нүктесіне барып, кері қайтатын уақыты - тербеліс периоды Т-ға тең. Ол $x_1 x_2$ кесіндісін жүріп өткен уақытты екі еселегенге тең және (3) ескере отырып:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{7}$$

x_1 және x_2 шектері (4) теңдеудің түбірі болады.

Орталық өрістегі қозғалыс. Аудандар заңы. Сонымен, екі дене есебін бір дене есебіне келтіруге болатынын көрсеттік және материалдық бөлшектің қозғалысы кейде сыртқы өрістің әсерінен де болатынын айттық. Егер материалдық бөлшектің потенциалдық энергиясы тек оның қандай да бір қозғалмайтын нүктеге дейінгі арақашықтығы $\vec{r}$ ға ғана тәуелді болса, ол өріс орталық өріс деп аталады.

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{8}$$

Бөлшекке әсер етуші күш $\vec{F}$ – абсолют мәні бойынша тек $\vec{r}$ -ға ғана тәуелді (арақашықтыққа), бағыты бойынша, әрбір нүктеге радиус вектордың бойымен бағытталған.

Бұрынырақ айтылғандай, орталық өрісте қозғалатын бөлшек үшін жүйенің өріс центріне қатысты моменті сақталады:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{P}\right] \tag{9}$$

$\vec{M}$ және $\vec{r}$ векторлары өзара перпендикуляр болғандықтан, $\vec{M}$ сақталған жағдайда, бөлшектің радиус векторы үнемі $\vec{M}$-ға перпендикуляр бір жазықтықта болады.

Сонымен бөлшектің орталық өрістегі қозғалыс траекториясы түгел бір жазықтықта болады. Онда полярлық координата жүйесін енгізіп Лагранж функциясын жазамыз:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \tag{10}$$

Бұл функцияда φ-кординатасының айқын түрі жоқ. Егер Лагранж функциясына жалпылама координата q_i-дің қандай да бір түрі енбесе, оны циклдік координата деп атайды:

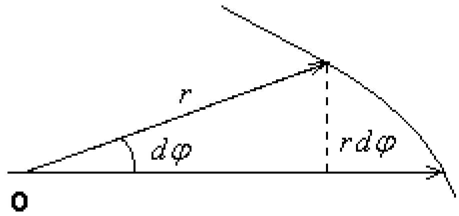
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{11}$$

Осыған байланысты жалпылама координатаға сәйкес импульс $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ қозғалыс интегралы болып табылады. Осы жағдай циклдік координаталардың көмегімен қозғалыс теңдеуін интегралдауды оңайлатады. $q_i = \varphi$ болса, жалпылама импульс:

$$P_{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = M\,, \tag{12}$$

яғни өткен параграфта айтылғандай, импульс моментімен сәйкес болады да, белгілі моменттің сақталу заңын береді:

$$M = mr^2\dot{\varphi} = const. \tag{13}$$



Сурет 18.

$dS = \frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}d\varphi$ шексіз аз радиус вектор мен сектордың доғасының жасайтын ауданы. Осы өрнекті dt-ға бөліп, секторлық жылдамдықты алуға болады:

$$\dot{f} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}. \tag{14}$$

Осыны моменттің өрнегіне қойсақ:

$$M = 2m\dot{f}\ . \tag{15}$$

Сондықтан осы моменттің сақталуы – секторлық жылдамдықтың сақталуын қамтамасыз етеді. Яғни, қозғалыстағы радиус вектор бірдей уақыт аралықтарында бірдей аудандарды сызады. Бұл *Кеплердің екінші заңы* деп аталады. Орталық өрісте қозғалатын бөлшектің моментінің сақталуын кейде аудандар интегралы деп те атайды. Сонымен орталық өрісте қозғалатын бөлшектің қозғалыс есебін толық шешу үшін энергия мен моменттің сақталу заңын пайдаланамыз. Яғни қозғалыс теңдеуін жазбаса да болады:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r\ \dot{\varphi}^2\right) + U(r) \tag{16}$$

$$M = mr^2\dot{\varphi} \text{ өрнегінен } \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}, \tag{17}$$

осыны қолданып:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{18}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E - U(r))}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2}} = \frac{dr}{dt}. \tag{19}$$

бұл өрнекті интегралдасақ:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const \tag{20}$$

(17) арқылы полярлық бұрышқа қатысты теңдеуді аламыз:

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} \Rightarrow$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \tag{21}$$

қозғалыстың радиалды бөлігін «эффективті» потенциалдық энергиясы бар өрістегі бір өлшемді қозғалыс ретінде қарастыруға болады.

$$U_{эфф} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{22}$$

$\frac{M^2}{2mr^2}$ – шамасы кейде центрге тартқыш энергия деп аталады.

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{23}$$

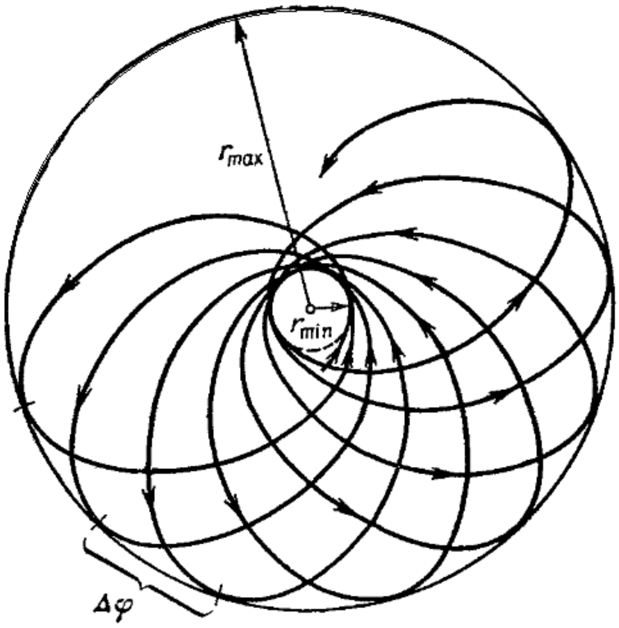
центрден r- қашықтықтағы қозғалыс шекарасын анықтайды. (12.17) орындалса $\dot{r} = 0$ – $r(t)$ функциясының өсуінен кемуіне траекторияның «бұрылу нүктесін» көрсетеді.

Егер $\vec{r}$ -радиус вектордың өзгеруі тек $r \geq r_{\min}$ шектелсе, бөлшектің қозғалысы инфинитті болып, траекториясы шексіздіктен келіп шексіздікке кетеді.

Егер r өзгеру аймағының r_{min} және r_{max} екі шектелу нүктесі болса, бөлшектің қозғалысы финитті болып, траектория радиустары $r = r_{max}$ және $r = r_{min}$ тең болатын дөңгелектің ішінде жатады. Яғни траектория тұйықталған қисық болып табылады. r – радиус векторы r_{max}-нан r_{min}-ге дейін және қайтадан r_{max}-ге өзгеретін уақыт аралығында ол $\Delta\varphi$ бұрышқа ығысады.

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{24}$$

Траекторияның тұйықталу шарты болып осы $\Delta\varphi$ бұрышы $\Delta\varphi = \frac{2\pi m}{n}$ болатындай жағдайды аламыз, мұндағы m, n – бүтін сандар. Сонда нүктенің радиус векторы n рет периодты қайталанып отырып және m рет бүтін айналып өзінің бастапқы мәніне сәйкес келеді де, траектория тұйықталады.



Сурет 19.

Бірақ $U(r)$ жалпы түрде $\Delta\varphi - 2\pi$-дің рационалды бөлімі емес. Сондықтан мұндай жағдайларда финитті траектория тұйық бола бермейді.

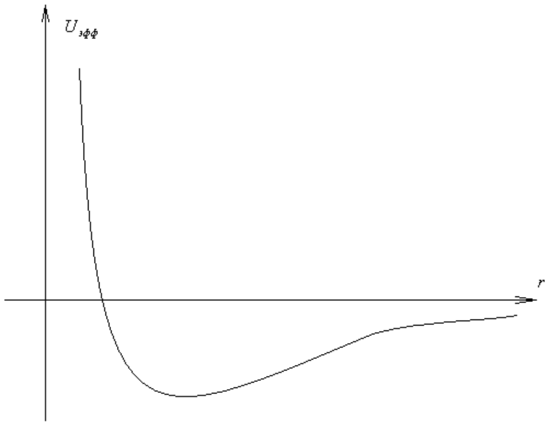
Орталық өрістің тек қана екі түрінде ғана финитті қозғалыстардың траекториясы тұйықталады. Бұлар потенциалды энергиясы $U(r) \sim \frac{1}{r}$ және $U(r) \sim \frac{1}{r^2}$ - қа пропорционал өрістер болып табылады.

Кеплер есебі. Орталық өрістердің маңызды жағдайлары ретінде, потенциалдық энергиясы $\vec{r}$-ға және осыған сәйкес күштер r^2-қа кері

пропорционал болатындай өрістерді қарастыруға болады. Бұларға мысал ретінде сипаты бойынша тартылысты беретін ньютондық ауырлық өрісін және әрі тартылыс, сонымен бірге тебілістерді беретін кулондық электростатикалық өрістерді жатқызуға болады.
Бастапқыда потенциалдық энергиясы

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{25}$$

болатындай оң таңбалы α тұрақтысы бар тартылыс өрісін қарастырамыз. «Эффективті» потенциалдық энергиясы 20 – суреттегідей түрде болады:



Сурет 20.

$$U_{эфф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{26}$$

$\vec{r} \to 0$ болғанда ол $+\infty$-ке айналады, ал $\vec{r} \to \infty$ ол теріс таңбасына байланысты нөлге ұмтылады; $\vec{r} = \frac{M^2}{\alpha m}$ болғанда ол мына минимумға тең болады:

$$\left(U_{эфф}\right)_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{27}$$

Осы графиктен $E \succ 0$ болған жағдайда бөлшектің қозғалысы инфинитті, ал $E \prec 0$ финитті болатыны көрініп тұр.

Траекторияның формасын мына жалпы формуладан аламыз:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \tag{28}$$

$$\varphi = arccos \frac{MU - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + const \tag{29}$$

ал, осындағы $const = 0$ болатындай етіп $\varphi -$ бұрышын таңдап аламыз

$$cos\varphi = \frac{MU - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} \tag{30}$$

$$U = \frac{1}{r} = cos\varphi \frac{m\alpha}{M^2} \sqrt{\left(\frac{2EM^2}{m\alpha^2} + 1\right)} + \frac{m\alpha}{M^2} \tag{31}$$

және мынадай белгілеулер енгізсек:

$$P = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{32}$$

Осыларды траекторияға арналған формулаға қойсақ:

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi} \tag{33}$$

Бұл фокусы координата басында орналасқан конустық қиманың теңдеуі; мұндағы $P -$ *орбитаның параметрі*, ал $e -$ *эксцентриситеті*. $\varphi = 0$ сәйкес келетін нүкте центрге ең жақын нүкте болып табылады және ол *перигелий* деп аталады.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Бір өлшемді қозғалыс анықтамасын айтыңыз.
2. Финитті және инфинитті қозғалыс дегеніміз не
3. Аялдау нүктелері дегеніміз не?
4. Бір өлшемді жағдайда дененің қозғалысын қандай параметрлер анықтайды?
5. Орталық өріс дегеніміз не?
6. Орталық өрістегі қозғалыс траекториясының пішіні қандай?
7. Кеплердің аудандар заңы қалай тұжырымдалады?
8. Орталық өрістегі қозғалған жүйенің энергиясы өзгергенде орбита қалай өзгереді?
9. «Эффективті» потенциалдық энергия деген не?
10. Кеплер заңдары бойынша планеталық орбиталардың қандай түрлері мүмкін?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5